有界解析函数的 n 阶导数估计

戴 绍 虞[1] 潘 一 飞[2]

(1. 金陵科技学院基础部，南京， 210001;

2. 江西师范大学数学与信息科学学院，江西南昌， 330027; Indiana University-Purdue University Fort Wayne ， USA)

提要 本文主要讨论了有界解析函数 n 阶导数的估计式。即对有界解析函数，利用其展开式系数间的关系得到了 n 阶导数的一般估计式，并取其特殊情形推出了简洁的 n 阶导数的估计式。

关键词 有界解析函数，正实部解析函数，导数估计

MR (2000) 主题分类 30C10

中图法分类 O174

文献标识码 A

文章编号

1 引言

设 $\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|\varphi(z)|<1$ ，则我们由 Schwarz 引理可知如下熟知的不等式：

$$|\varphi^{'}(z)| \leq (1-|\varphi(z)|^2)/(1-|z|^2)$$

1984 年，文 [1] 得到了二阶与三阶导数的估计式。当 $\varphi(z)$ 满足上述条件时，则

$$|\varphi^{''}(z)| \leq \frac{2!(1+|z|)}{(1-|z|^2)^2}(1-|\varphi(z)|^2)$$

随后，文 [2] 将结果推广至 n 阶导数的一般估计式：

$$|\varphi^{n}(z)| \leq \frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}\sum_{m=0}^{n-1} I(n,m)|z|^m$$

其中 $I(n,0)=1, I(n,1)=n-1, I(n,m)=\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{n-1}{n-k-1}I(n-k,m-k); m\leq n-1, m=1,2,...n-1.$

本文目的在于讨论有界函数 n 阶导数的更精确的一般估计式，并推出了简洁的 n 阶导数的估计式。主要结果如下：

定理 1.1 设 $\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|\varphi(z)|<1$ ，则

$$|\varphi^{(n)}(z)| \leq \sum_{v=1}^{n} A_v \frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}$$

其中 $A_{2m+1}=1-|c_0|^2-...-|c_m|^2$ ， $A_{2m+2}=1-|c_0|^2-...-|c_m|^2$ ， $m=0,1,2,...$

$c_m=\frac{1}{m!}[\varphi^{(m)}(z)(1-|z|^2)^m+\sum\limits_{j=1}^{m-1}(-1)^j\frac{m!(m-1)!}{j!(m-j)!(m-j-1)!}\bar{z}^j(1-|z|^2)^{m-j}\varphi^{(m-j)}(z)].$

作者简介：戴绍虞 (1981.) ，女，浙江绍兴人，硕士，从事多复变函数研究． E-mail: dymdsy@163.com

推论 1.1 设 $\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|\varphi(z)|<1$ ，则

$$|\varphi^{(n)}(z)| \le \frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}(1+|z|)^{n-1}$$

推论 1.2 设 $\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|\varphi(z)|<1$ ，则当 $n \ge 3$ 时有

$$|\varphi^{(n)}(z)| \le \frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}(1+|z|)^{n-1} - \frac{n!|\varphi'(z)|^2}{(1-|z|^2)^{n-2}}[(1+|z|)^{n-1}-|z|^{n-1}-(n-1)|z|^{n-2}]$$

此外，我们通过应用上述定理证明过程中所用到的引理，得到了比 Bohr 定理更精确的估计。

2 定理及推论的证明

为了便于叙述，以下记 $\mathcal{B}=\{\varphi(z):\varphi(z)$ 在 D 上解析，且 $|\varphi(z)|<1\}$ ，其中 D 为单位圆。

定理 1.1 的证明需要下面两个引理。

引理 2.1 (见 [3]) 设 $f(z)\in\mathcal{B}$ ， $H(D)=\{D$ 上全体解析函数 $\}$, 记 $H'(D)$ 为 $H(D)$ 上的线性泛函空间。则对 $H'(D)$ 上的任何线性泛函 L 有下面的不等式成立

$$|L^2(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta})| \le |L|^2(\frac{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}}) \tag{2.1}$$

其中 L^2 表示 $L^2(\varphi)=L(L(\varphi))$ ， $\varphi=\varphi(z,\zeta)$ 关于 z 解析，且关于 ζ 解析； $|L|^2$ 表示 $|L|^2(\psi)=L(\overline{L(\psi)})$ ， $\psi=\psi(z,\bar{\zeta})$ 关于 z 解析，且关于 $\bar{\zeta}$ 解析。

引理 2.2 (见 [3]) 设 $f(z)\in\mathcal{B}$ ，若 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ ，则当 $n\ge 0$ 时有

$$|a_{2n+1}| \le 1-|a_0|^2-...-|a_n|^2,$$

$$|a_{2n+2}| \le 1-|a_0|^2-...-|a_n|^2.$$

此引理在 [3] 中没有给证明，为方便读者，我们给出证明。

证 由引理 2.1 知对 $H'(D)$ 上的任何线性泛函 L 有 (2.1) 式成立。

因为 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ ，所以

$$\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{z^n-\zeta^n}{z-\zeta}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\sum_{m=0}^{n-1}z^{n-1-m}\zeta^m)$$

$$\begin{aligned}\frac{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}} &= (\sum_{n=0}^{\infty}z^n\bar{\zeta}^n)[1-(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n)(\sum_{m=0}^{\infty}\bar{a}_m\bar{\zeta}^m)] \\ &= (\sum_{n=0}^{\infty}z^n\bar{\zeta}^n)-(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\bar{\zeta}^n)(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n)(\sum_{m=0}^{\infty}\bar{a}_m\bar{\zeta}^m)\end{aligned}$$

设线性泛函 $L(F)=F(0)$ ，即取 F 在 0 点的 Taylor 展开式的常数项，则

$$\begin{aligned}
L^2(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}) &= L_\zeta(L_z(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta})) \\
&= L_\zeta(\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\sum_{m=0}^{n-1}z^{n-1-m}\zeta^m)) \\
&= L_\zeta(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\zeta^{n-1}) = a_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|L|^2(\frac{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}}) &= L_\zeta(\overline{L_z(\frac{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}})}) \\
&= L_\zeta(\overline{L_z((\sum_{n=0}^{\infty}z^n\bar{\zeta}^n)-(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\bar{\zeta}^n)(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n)(\sum_{m=0}^{\infty}\bar{a}_m\bar{\zeta}^m))}) \\
&= L_\zeta(\overline{1-a_0\sum_{m=0}^{\infty}\bar{a}_m\bar{\zeta}^m}) \\
&= L_\zeta(1-\bar{a}_0\sum_{m=0}^{\infty}a_m\zeta^m) \\
&= 1-|a_0|^2
\end{aligned}$$

则由 (2.1) 式得 $|a_1|\le 1-|a_0|^2$.
更一般地，若设 $L(F)=\frac{F^{(p)}(0)}{p!}$ ，即取 F 在 0 点的 Taylor 展开式的 p 次项系数，则

$$\begin{aligned}
L^2(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}) &= L_\zeta(L_z(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta})) \\
&= L_\zeta(\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\sum_{m=0}^{n-1}z^{n-1-m}\zeta^m)) \\
&= L_\zeta(\sum_{n=p+1}^{\infty}a_n\zeta^{n-1-p}) = a_{2p+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|L|^2(\frac{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}}) &= L_\zeta(\overline{L_z(\frac{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}})}) \\
&= L_\zeta(\overline{L_z((\sum_{n=0}^{\infty}z^n\bar{\zeta}^n)-(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\bar{\zeta}^n)(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n)(\sum_{m=0}^{\infty}\bar{a}_m\bar{\zeta}^m))}) \\
&= L_\zeta(\overline{\bar{\zeta}^p-(\sum_{n=0}^{p}\bar{\zeta}^na_{p-n})(\sum_{m=0}^{\infty}\bar{a}_m\bar{\zeta}^m)}) \\
&= L_\zeta(\zeta^p-(\sum_{n=0}^{p}\zeta^n\bar{a}_{p-n})(\sum_{m=0}^{\infty}a_m\zeta^m)) \\
&= 1-\sum_{n=0}^{p}|a_{p-n}|^2 \\
&= 1-|a_0|^2-...-|a_p|^2
\end{aligned}$$

则由 (2.1) 式得 $|a_{2p+1}| \le 1 - |a_0|^2 - ... - |a_p|^2$.

综上可知，当 $n \ge 0$ 时 $|a_{2n+1}| \le 1 - |a_0|^2 - ... - |a_n|^2$.

下证当 $n \ge 0$ 时 $|a_{2n+2}| \le 1 - |a_0|^2 - ... - |a_n|^2$.

令 $g(z) = zf(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ，则由上可知

$$|b_{2n+1}| \le 1 - |b_0|^2 - ... - |b_n|^2 \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

注意到 $b_0 = 0$ ，当 $n \ge 0$ 时 $b_{n+1} = a_n$ ，则

$$|a_{2n}| \le 1 - |a_0|^2 - ... - |a_{n-1}|^2 \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

即

$$|a_{2n+2}| \le 1 - |a_0|^2 - ... - |a_n|^2 \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

至此引理得证。

下面给出定理 1.1 的证明。

证 $\varphi(z) \in \mathcal{B}$ ，考虑

$$F(z) = \varphi(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v z^v \in \mathcal{B}$$

其中 c_v 与 ζ 有关。

$$\varphi(z) = F(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v (\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z})^v \in \mathcal{B}$$

$$\varphi^{(n)}(\zeta) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v \frac{d^n}{dz^n}(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z})^v|_{z=\zeta}$$

又当 $v \ge 1$ 时，令 $f(z) = (z-\zeta)^v$ ， $g(z) = (1-\bar{\zeta}z)^{-v}$ ，则

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dz^n}(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z})^v &= \frac{d^n}{dz^n}[(z-\zeta)^v(1-\bar{\zeta}z)^{-v}] \\ &= \frac{d^n}{dz^n}(f(z)g(z)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(z) g^{(n-k)}(z) \end{aligned}$$

$$f^{(k)}(z) = \begin{cases} \frac{v!}{(v-k)!}(z-\zeta)^{v-k} & k \le v \\ 0 & k > v \end{cases}$$

$$g^{(n-k)}(z) = \frac{(v+k-1)!}{(v-1)!}\bar{\zeta}^k(1-\bar{\zeta}z)^{-v-k}$$

所以

$$\frac{d^n}{dz^n}(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z})^v|_{z=\zeta} = \begin{cases} 0 & n < v \\ \frac{(\bar{\zeta})^{n-v}}{(1-|\zeta|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!} & n \ge v \end{cases}$$

那么

$$\varphi^{(n)}(\zeta)=\sum_{v=0}^{\infty}c_v\frac{d^n}{dz^n}(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z})^v|_{z=\zeta}$$
$$=\sum_{v=1}^{n}c_v\frac{d^n}{dz^n}(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z})^v|_{z=\zeta}$$
$$=\sum_{v=1}^{n}c_v\frac{(\bar{\zeta})^{n-v}}{(1-|\zeta|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}$$

所以 $|\varphi^{(n)}(\zeta)|\leq\sum\limits_{v=1}^{n}|c_v|\frac{|\zeta|^{n-v}}{(1-|\zeta|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}$.

若令

$$A_{2m+1}=1-|c_0|^2-...-|c_m|^2$$

$$A_{2m+2}=1-|c_0|^2-...-|c_m|^2$$

其中 $m=0,1,2,...$

则利用引理 2.2 的结果对 $|c_v|$ 进行放大，可得

$$|\varphi^{(n)}(\zeta)|\leq\sum_{v=1}^{n}A_v\frac{|\zeta|^{n-v}}{(1-|\zeta|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}$$

注意到 c_m 是由式子 $F(z)=\varphi(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z})=\sum\limits_{v=0}^{\infty}c_vz^v$ 决定的，则

$$c_m=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial z^m}\varphi(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z})|_{z=0}$$

由文 [4] 知

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m}\varphi(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z})=\varphi^{(m)}(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z})(\frac{1-|\zeta|^2}{(1+\bar{\zeta}z)^2})^m$$
$$+\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j\frac{m!(m-1)!}{j!(m-j)!(m-j-1)!}\frac{\bar{\zeta}^j(1-|\zeta|^2)^{m-j}}{(1+\bar{\zeta}z)^{2m-j}}\varphi^{(m-j)}(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z})$$

则

$$c_m=\frac{1}{m!}[\varphi^{(m)}(\zeta)(1-|\zeta|^2)^m+\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j\frac{m!(m-1)!}{j!(m-j)!(m-j-1)!}\bar{\zeta}^j(1-|\zeta|^2)^{m-j}\varphi^{(m-j)}(\zeta)]$$

将 ζ 换成 z 即得定理结果。

在定理 1.1 中显然 $A_v\leq 1-|c_0|^2, v=0,1,2,...$，我们利用 $1-|c_0|^2$ 对 A_v 进行放大，得到了推论 1.1 。

下面给出推论 1.1 的证明。

证　由定理 1.1 的结果可知

$$|\varphi^{(n)}(z)|\leq\sum_{v=1}^{n}(1-|c_0|^2)\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}$$

又 $c_0=\varphi(z)$，则

$$
\begin{aligned}
|\varphi^{(n)}(z)| &\leq \sum_{v=1}^{n}(1-|\varphi(z)|^2)\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}\\
&= \frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!}|z|^m\\
&= \frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}|z|^m\\
&= \frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}(1+|z|)^{n-1}
\end{aligned}
$$

至此，推论得证。

此外，在作者最近所作文 [6] 中也得到了和推论 1.1 相同的结果。

考虑定理 1.1 结果中的 A_v ，若当 $v \geq 3$ 时统一放大 A_v 至 $A_v \leq 1-|c_0|^2-|c_1|^2$ ，那么可得推论 1.2 。

下面给出推论 1.2 的证明。

证 由定理 1.1 的结果知

$$
|\varphi^{(n)}(z)| \leq \sum_{v=1}^{n}A_v\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}
$$

其中 $A_1 = A_2 = 1-|c_0|^2$, 当 $v \geq 3$ 时 $A_v \leq 1-|c_0|^2-|c_1|^2$, $c_0 = \varphi(z)$, $c_1 = \varphi'(z)(1-|z|^2)$. 那么

$$
\begin{aligned}
|\varphi^{(n)}(z)| &\leq \sum_{v=1}^{2}A_v\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!} + \sum_{v=3}^{n}A_v\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}\\
&\leq (1-|c_0|^2)\sum_{v=1}^{2}\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!} + (1-|c_0|^2-|c_1|^2)\sum_{v=3}^{n}\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}\\
&= (1-|c_0|^2)\sum_{v=1}^{n}\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!} + (-|c_1|^2)\sum_{v=3}^{n}\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}\\
&= \frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}(1+|z|)^{n-1} - \sum_{v=3}^{n}\frac{|\varphi'(z)|^2|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^{n-2}}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}\\
&= \frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}(1+|z|)^{n-1} - \frac{n!|\varphi'(z)|^2}{(1-|z|^2)^{n-2}}[(1+|z|)^{n-1}-|z|^{n-1}-(n-1)|z|^{n-2}]
\end{aligned}
$$

3 精确性的说明

由定理 1.1 与推论 1.1 的证明可知前者的结果比后者精确，但后者的结果更为简洁。

下面我们利用 Mobius 变换 $f(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ 来考察定理 1.1 的精确程度。

考察 Mobius 变换 $f(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ 在 $z = 0$ 处的导数，当求导次数是奇数次时，由定理 1.1 的估计式可知

$$
|f^{(2n+1)}(0)| \leq A_{2n+1}(2n+1)! = (2n+1)!(1-|c_0|^2-...-|c_n|^2)
$$

经计算 $|c_0|=|a|^2$ ，当 $n\geq 1$ 时 $|c_n|=\frac{1}{n!}|f^{(n)}(0)|=|a|^{n-1}(1-|a|^2)$ ，则

$$\begin{aligned}|f^{(2n+1)}(0)| &\leq (2n+1)![1-|a|^2-(1-|a|^2)^2-|a|^2(1-|a|^2)^2...-|a|^{2n-2}(1-|a|^2)^2]\\ &=(2n+1)!(1-|a|^2)[1-(1-|a|^2)(1+|a|^2+...+|a|^{2n-2})]\\ &=(2n+1)!|a|^{2n}(1-|a|^2)\end{aligned}$$

而另一方面，对 $f(z)=\frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ 计算得

$$|f^{(2n+1)}(0)|=(2n+1)!|a|^{2n}(1-|a|^2)$$

所以 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的奇数阶导数的估计值与真实值完全相等。

此外，我们通过比较来说明，推论 1.1 的结果比引言中提到的文 [2] 的结果要好。

比较推论 1.1 的结果与文 [2] 的结果，差别在于 $(1+|z|)^{n-1}$ 与 $\sum\limits_{m=0}^{n-1}I(n,m)|z|^m$ ，即比较 $\sum\limits_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}|z|^m$ 与 $\sum\limits_{m=0}^{n-1}I(n,m)|z|^m$.

当 $n=2$ 时，本文所得结果与文 [1],[2] 的结果相同，但当 $n\geq 3$ 时，本文结果要比文 [2] 的结果好。因为当 $n\geq 3$ 时，比较 $\binom{n-1}{m}$ 与 $I(n,m)$

$$\binom{n-1}{0}=I(n,0)=1,\quad \binom{n-1}{1}=I(n,1)=n-1$$

当 $m\geq 2$ 时，

$$\binom{n-1}{m}=\binom{n-1}{n-1-m}=\binom{n-1}{n-1-m}I(n-m,m-m)<\sum_{k=1}^{m}\binom{n-1}{n-k-1}I(n-k,m-k)=I(n,m).$$

例如：当 $n=3$ 时，文 [2] 的结果是： $|\varphi'''(z)|\leq\frac{3!(1+2|z|+3|z|^2)}{(1-|z|^2)^3}(1-|\varphi(z)|^2)$ ，但本文推论 1.1 的结果是： $|\varphi'''(z)|\leq\frac{3!(1+2|z|+|z|^2)}{(1-|z|^2)^3}(1-|\varphi(z)|^2)$ 。

4 引理 2.2 的应用

我们已知有如下的 Bohr 定理：

定理 4.1 (见 [5]) 设 $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|\varphi(z)|<1$, 则当 $|z|<\frac{1}{3}$ 时， $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n<1$, 且 $|z|=\frac{1}{3}$ 是最佳半径。

利用引理 2.2 我们将得到比 Bohr 定理更精确的估计如下：

定理 4.2 设 $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|\varphi(z)|<1$ 则当 $|z|\leq\frac{1}{3}$ 时， $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n<1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{|z|^{2n+1}}{1-|z|}$.

证 设 $r=|z|$，由引理 2.2

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n &= |a_0|+|a_1|r+|a_2|r^2+|a_3|r^3+|a_4|r^4+...+|a_n|r^n+...\\
&\le |a_0|+(1-|a_0|^2)r+(1-|a_0|^2)r^2+(1-|a_0|^2-|a_1|^2)r^3+(1-|a_0|^2-|a_1|^2)r^4\\
&+...+(1-|a_0|^2-...-|a_n|^2)r^{2n+1}+(1-|a_0|^2-...-|a_n|^2)r^{2n+2}+...\\
&= |a_0|+(1-|a_0|^2)\sum_{n=1}^{\infty}r^n-\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2\sum_{m=2n+1}^{\infty}r^m)\\
&= |a_0|+(1-|a_0|^2)\frac{r}{1-r}-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n+1}}{1-r}\end{aligned}$$

因为 $|a_0|+(1-|a_0|^2)\frac{r}{1-r}$ 关于 r 单调递减，那么当 $r\le\frac{1}{3}$ 时

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n &\le |a_0|+(1-|a_0|^2)\frac{r}{1-r}-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n+1}}{1-r}\\
&\le |a_0|+(1-|a_0|^2)\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n+1}}{1-r}\\
&= \frac{2|a_0|+1-|a_0|^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n+1}}{1-r}\end{aligned}$$

又当 $0\le|a_0|<1$ 时， $\frac{2|a_0|+1-|a_0|^2}{2}<1$，所以当 $r\le\frac{1}{3}$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n<1-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n+1}}{1-r}.$$

定理证毕。

参　考　文　献

[1] 潘一飞, 廖孝中. 关于有界函数的导数 [J]. 江西师范大学学报 (自然科学版)，1984，(1)： 21-24.

[2] 苑文法. 有界正则函数的导数估计 [J]. 数学杂志， 2001， 21(3)： 301-303.

[3] 谭德邻. 有界异零函数的系数估计 [J]. 数学年刊， 1983， 4(1)： 97-104.

[4] 龚升. 关于 Mobius 变换的一点注记 [J]. 纯粹数学与应用数学， 1985， 1(1)： 1-15.

[5] H. Boas, and D. Khavinson, Bohr's power series theorem in several variables, Proc. Amer. Math. Soc. 1997， 125(10)： 2975-2979.

[6] Shaoyu Dai and Yifei Pan, Note on Schwarz-Pick estimates for bounded and positive real part analytic functions, Preprint, October 2006.

Estimation of nth Derivatives for Bounded Analytic Functions

Shaoyu Dai[1], Yifei Pan[2]

(*1.General Study Program, Jinling Institute of Technology, Nanjing* 210001 China; *2.Indiana University-Purdue University Fort Wayne, USA and Institute of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang* 330027 China)

Abstract In this paper, we mainly discuss the problem of estimating the n-th derivatives of bounded analytic functions.

Keywords bounded analytic function, eatimation of derivative
2000 MR Subject Classification 30C10