# 有界解析函数和正实部解析函数的 $n$ 阶导数估计

戴 绍 虞 *潘 一 飞 **

**提要** 本文主要讨论了有界解析函数和正实部解析函数的 $n$ 阶导数的精确估计式。

**关键词** 有界解析函数，正实部解析函数，导数估计
**MR (2000) 主题分类** 30C10
**中图法分类** O174
**文献标识码** A
**文章编号**

## 1 引言

设 $\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|\varphi(z)|<1$ ，则我们由 Schwarz 引理可知如下熟知的不等式：

$$|\varphi^{'}(z)| \leq (1-|\varphi(z)|^2)/(1-|z|^2)$$

1984 年，文 [1] 得到了二阶与三阶导数的估计式。当 $\varphi(z)$ 满足上述条件时，则

$$|\varphi^{''}(z)| \leq \frac{2!(1+|z|)}{(1-|z|^2)^2}(1-|\varphi(z)|^2)$$

随后，文 [2] 将结果推广至 $n$ 阶导数的一般估计式：

$$|\varphi^{n}(z)| \leq \frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}\sum_{m=0}^{n-1} I(n,m)|z|^m$$

其中 $I(n,0)=1, I(n,1)=n-1, I(n,m)=\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{n-1}{n-k-1}I(n-k,m-k); m\leq n-1, m=1,2,...n-1.$

本文的第二部分讨论有界函数 $n$ 阶导数的一般估计式，并得到更好的结果。当 $n=2$ 时，所得结果和以前一样，但当 $n\geq 3$ 时，所得结果都比以前要好。结果如下：

**定理 1.1** 设 $\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|\varphi(z)|<1$ ，则

$$|\varphi^{(n)}(z)| \leq \frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}(1+|z|)^{n-1}$$

随后我们在第三部分中给出了较上述定理更精确的估计，但估计式甚为复杂。

本文的第四部分讨论了正实部函数 $n$ 阶导数的估计，与有界函数不同的是得到了非常精确的估计式。

## 2 有界函数导数的一般估计

为了便于叙述，以下记 $\mathcal{B}=\{\varphi(z):\varphi(z)$ 在 $D$ 上解析，且 $|\varphi(z)|<1\}$ ，其中 $D$ 为单位圆。

*金陵科技学院基础部，南京 210012. E-mail: dymdsy@163.com
**江西师范大学数信学院，南昌， Indiana University-Purdue University Fort Wayne ， USA

首先我们用很简单的方法证明以下熟知的不等式。

**引理 2.1** 设 $\varphi(z)\in\mathcal{B},\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，则当 $n\geq 1$ 时有 $|a_n|\leq 1-|a_0|^2$.

**证** 考虑 $\omega^k=1,k\geq 1$ 且 $k$ 为整数. 记 $\omega_j=e^{\frac{2\pi i}{k}j}$, 其中 $j=1,2,...,k$. 那么当 $s\geq k-1$ 且 $s$ 为整数时，我们有

$$\omega_1{}^s+\omega_2{}^s+...+\omega_k{}^s=0,$$

因为 $\omega_1{}^s+\omega_2{}^s+...+\omega_k{}^s=\omega_1{}^s+\omega_1{}^{2s}+...+\omega_1{}^{ks}=\omega_1{}^s(1+\omega_1{}^s+\omega_1{}^{2s}+...+\omega_1{}^{(k-1)s})=\omega_1{}^s(\omega_1{}^s+\omega_1{}^{2s}+...+\omega_1{}^{ks})$, 又 $\omega_1{}^s\neq 1$.

设 $f(z)=\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k}\varphi(\omega_jz)$，则

$$f(z)=a_0+a_kz^k+a_{2k}z^{2k}+...a_{nk}z^{nk}+...$$

考虑

$$g(z)=\frac{f(z)-a_0}{1-\bar{a_0}f(z)}=b_kz^k+o(z^k)$$

其中 $b_k=\frac{a_k}{1-|a_0|^2}$.

根据 Cauchy 估计可知，若 $g(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n$，且 $g(z)\in\mathcal{B}$，则 $|b_n|\leq 1$.

注意到 $g(z)\in\mathcal{B}$，则 $|b_k|\leq 1$，即 $|a_k|\leq 1-|a_0|^2$，又 $k\geq 1$，所以当 $n\geq 1$ 时有 $|a_n|\leq 1-|a_0|^2$.

下面给出定理 1.1 的证明。

**证** $\varphi(z)\in\mathcal{B}$，考虑

$$F(z)=\varphi(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z})=\sum_{v=0}^{\infty}c_vz^v\in\mathcal{B}$$

其中 $c_v$ 与 $\zeta$ 有关。

$$\varphi(z)=F(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z})=\sum_{v=0}^{\infty}c_v(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z})^v\in\mathcal{B}$$

$$\varphi^{(n)}(\zeta)=\sum_{v=0}^{\infty}c_v\frac{d^n}{dz^n}(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z})^v|_{z=\zeta}$$

又当 $v\geq 1$ 时，令 $f(z)=(z-\zeta)^v$， $g(z)=(1-\bar{\zeta}z)^{-v}$，则

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dz^n}(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z})^v&=\frac{d^n}{dz^n}[(z-\zeta)^v(1-\bar{\zeta}z)^{-v}]\\&=\frac{d^n}{dz^n}(f(z)g(z))=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(z)g^{(n-k)}(z)\end{aligned}$$

$$f^{(k)}(z)=\begin{cases}\frac{v!}{(v-k)!}(z-\zeta)^{v-k} & k\leq v\\ 0 & k>v\end{cases}$$

$$g^{(n-k)}(z)=\frac{(v+k-1)!}{(v-1)!}\bar{\zeta}^k(1-\bar{\zeta}z)^{-v-k}$$

所以

$$\frac{d^n}{dz^n}(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z})^v|_{z=\zeta} = \begin{cases} 0 & n < v \\ \frac{(\bar{\zeta})^{n-v}}{(1-|\zeta|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!} & n \geq v \end{cases}$$

那么

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(\zeta) &= \sum_{v=0}^{\infty} c_v \frac{d^n}{dz^n}(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z})^v|_{z=\zeta} \\ &= \sum_{v=1}^{n} c_v \frac{d^n}{dz^n}(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z})^v|_{z=\zeta} \\ &= \sum_{v=1}^{n} c_v \frac{(\bar{\zeta})^{n-v}}{(1-|\zeta|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!} \end{aligned}$$

注意到 $c_0 = \varphi(\zeta)$ ，则由引理 2.1 有，当 $v \geq 1$ 时

$$|c_v| \leq 1 - |c_0|^2 = 1 - |\varphi(\zeta)|^2$$

那么，

$$\begin{aligned} |\varphi^{(n)}(\zeta)| &\leq \sum_{v=1}^{n} |c_v| \frac{|\zeta|^{n-v}}{(1-|\zeta|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!} \\ &\leq \frac{n!(1-|\varphi(\zeta)|^2)}{(1-|\zeta|^2)^n}\sum_{v=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}|\zeta|^{n-v} \\ &= \frac{n!(1-|\varphi(\zeta)|^2)}{(1-|\zeta|^2)^n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!}|\zeta|^{m} \\ &= \frac{n!(1-|\varphi(\zeta)|^2)}{(1-|\zeta|^2)^n}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}|\zeta|^{m} \\ &= \frac{n!(1-|\varphi(\zeta)|^2)}{(1-|\zeta|^2)^n}(1+|\zeta|)^{n-1} \end{aligned}$$

将 $\zeta$ 换成 $z$ 即得定理结果。

下面我们通过比较来说明，本文的定理 1.1 比引言中提到的文 [2] 的结果要好。

比较本文与文 [2] 的结果,差别在于 $(1+|\zeta|)^{n-1}$ 与 $\sum_{m=0}^{n-1} I(n,m)|z|^m$ ,即比较 $\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}|z|^m$ 与 $\sum_{m=0}^{n-1} I(n,m)|z|^m$.

当 $n=2$ 时，本文所得结果与文 [1] 的结果相同，但当 $n \geq 3$ 时，本文结果要比文 [2] 的结果好。因为当 $n \geq 3$ 时，比较 $\binom{n-1}{m}$ 与 $I(n,m)$

$$\binom{n-1}{0} = I(n,0) = 1$$

$$\binom{n-1}{1} = I(n,1) = n-1$$

当 $m \geq 2$ 时，

$$\binom{n-1}{m} = \binom{n-1}{n-1-m} = \binom{n-1}{n-1-m} I(n-m, m-m) < \sum_{k=1}^{m}\binom{n-1}{n-k-1} I(n-k, m-k) = I(n,m)$$

所以当 $n\geq 3$ 时， $\sum\limits_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}|z|^m<\sum\limits_{m=0}^{n-1}I(n,m)|z|^m$ ，所以当 $n\geq 3$ 时，本文结果要比文 [2] 的结果好。

例如：当 $n=3$ 时，文 [2] 的结果是：

$$|\varphi^{'''}(z)|\leq\frac{3!(1+2|z|+3|z|^2)}{(1-|z|^2)^3}(1-|\varphi(z)|^2)$$

但本文结果是：

$$|\varphi^{'''}(z)|\leq\frac{3!(1+2|z|+|z|^2)}{(1-|z|^2)^3}(1-|\varphi(z)|^2)$$

接下来我们利用 Mobius 变换 $f(z)=\frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ 来考察定理 1.1 的估计式的精确程度。

当 $n=1$ 时， $|f'(z)|$ 的估计值与真实值完全相等。而当 $n\geq 2$ 时， $|f^{(n)}(z)|$ 的估计值与真实值不相等，即使在 $z=0$ 处， $|f^{(n)}(0)|$ 的估计值与真实值也不相等。由我们得到的估计式可知

$$|f^{(n)}(0)|\leq n!(1-|a|^2)$$

但实际上经计算

$$|f^{(n)}(0)|=n!|a|^{n-1}(1-|a|^2)$$

两者相差 $|a|^{n-1}$ ，但从中可看出当 $a\to 1$ 时， $|f^{(n)}(0)|$ 的估计值是无限靠近真实值的。

## 3 有界函数导数的更精确的估计

在定理 1.1 的证明过程中，我们利用了 $|c_v|\leq 1-|c_0|^2$ 对 $|c_v|$ 进行放大，下面我们将要用一个更为精确的式子来对 $c_v$ 进行放大，从而得到一个更为精确的 $n$ 阶导数估计式，如下：

**定理 3.1** 设 $\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|\varphi(z)|<1$ ，则

$$|\varphi^{(n)}(z)|\leq\sum_{v=1}^{n}A_v\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}$$

其中 $A_{2m+1}=1-|c_0|^2-...-|c_m|^2$ ， $A_{2m+2}=1-|c_0|^2-...-|c_m|^2$ ， $m=0,1,2,...$

$c_m=\frac{1}{m!}[\varphi^{(m)}(z)(1-|z|^2)^m+\sum\limits_{j=1}^{m-1}(-1)^j\frac{m!(m-1)!}{j!(m-j)!(m-j-1)!}\bar{z}^j(1-|z|^2)^{m-j}\varphi^{(m-j)}(z)].$

为了证明此定理，先给出两个引理。

**引理 3.1** (见 [3]) 设 $f$ 是 $D$ 上的解析函数，且 $|f(z)|<1$ ，记 $H(D)$ 为 $D$ 上解析函数的全体。则对 $H(D)$ 上的任何线性泛函 $L$ 有下面的不等式成立

$$|L^2(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta})|\leq|L|^2(\frac{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}})\tag{3.1}$$

其中 $L^2$ 表示 $L^2(\varphi)=L(L(\varphi))$ ， $\varphi=\varphi(z,\zeta)$ 关于 $z$ 解析，且关于 $\zeta$ 解析； $|L|^2$ 表示 $|L|^2(\psi)=L(\overline{L(\psi)})$ ， $\psi=\psi(z,\bar{\zeta})$ 关于 $z$ 解析，且关于 $\bar{\zeta}$ 解析。

**引理 3.2** (见 [3]) 设 $f(z)\in\mathcal{B}$ ，若 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ ，则当 $n\geq 0$ 时有

$$|a_{2n+1}|\leq 1-|a_0|^2-...-|a_n|^2,$$

$$|a_{2n+2}|\leq 1-|a_0|^2-...-|a_n|^2.$$

此引理在 [3] 中没有给证明，为方便读者，我们给出证明。

**证** 由引理 3.1 知对 $H(D)$ 上的任何线性泛函 $L$ 有 (3.1) 式成立。

因为 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ ，所以

$$\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{z^n-\zeta^n}{z-\zeta}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\sum_{m=0}^{n-1}z^{n-1-m}\zeta^m)$$

$$\begin{aligned}\frac{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}}&=(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\bar{\zeta}^n)[1-(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n)(\sum_{m=0}^{\infty}\bar{a}_m\bar{\zeta}^m)]\\&=(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\bar{\zeta}^n)-(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\bar{\zeta}^n)(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n)(\sum_{m=0}^{\infty}\bar{a}_m\bar{\zeta}^m)\end{aligned}$$

设线性泛函 $L(F)=F(0)$ ，即取 $F$ 在 0 点的 Taylor 展开式的常数项，则

$$\begin{aligned}L^2(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta})&=L_\zeta(L_z(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}))\\&=L_\zeta(\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\sum_{m=0}^{n-1}z^{n-1-m}\zeta^m))\\&=L_\zeta(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\zeta^{n-1})=a_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|L|^2(\frac{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}})&=L_\zeta(\overline{L_z(\frac{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}})})\\&=L_\zeta(\overline{L_z((\sum_{n=0}^{\infty}z^n\bar{\zeta}^n)-(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\bar{\zeta}^n)(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n)(\sum_{m=0}^{\infty}\bar{a}_m\bar{\zeta}^m))})\\&=L_\zeta(\overline{1-a_0\sum_{m=0}^{\infty}\bar{a}_m\bar{\zeta}^m})\\&=L_\zeta(1-\bar{a}_0\sum_{m=0}^{\infty}a_m\zeta^m)\\&=1-|a_0|^2\end{aligned}$$

则由 (3.1) 式得 $|a_1|\le 1-|a_0|^2$.

更一般地，若设 $L(F)=\frac{F^{(p)}(0)}{p!}$ ，即取 $F$ 在 0 点的 Taylor 展开式的 $p$ 次项系数，则

$$\begin{aligned}L^2(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta})&=L_\zeta(L_z(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}))\\&=L_\zeta(\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\sum_{m=0}^{n-1}z^{n-1-m}\zeta^m))\\&=L_\zeta(\sum_{n=p+1}^{\infty}a_n\zeta^{n-1-p})=a_{2p+1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|L|^2\left(\frac{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}}\right) &= L_\zeta\left(\overline{L_z\left(\frac{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}}\right)}\right)\\
&= L_\zeta\left(\overline{L_z\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\bar{\zeta}^n\right)-\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\bar{\zeta}^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\bar{a}_m\bar{\zeta}^m\right)\right)}\right)\\
&= L_\zeta\left(\overline{\bar{\zeta}^p-\left(\sum_{n=0}^{p}\bar{\zeta}^n a_{p-n}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\bar{a}_m\bar{\zeta}^m\right)}\right)\\
&= L_\zeta\left(\zeta^p-\left(\sum_{n=0}^{p}\zeta^n \bar{a}_{p-n}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m\zeta^m\right)\right)\\
&= 1-\sum_{n=0}^{p}|a_{p-n}|^2\\
&= 1-|a_0|^2-...-|a_p|^2
\end{aligned}
$$

则由 (3.1) 式得 $|a_{2p+1}| \leq 1-|a_0|^2-...-|a_p|^2$.

综上可知，当 $n \geq 0$ 时 $|a_{2n+1}| \leq 1-|a_0|^2-...-|a_n|^2$.

下证当 $n \geq 0$ 时 $|a_{2n+2}| \leq 1-|a_0|^2-...-|a_n|^2$.

令 $g(z)=zf(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ，则由上可知

$$|b_{2n+1}| \leq 1-|b_0|^2-...-|b_n|^2 \qquad (n=0,1,2,...)$$

注意到 $b_0=0$ ，当 $n \geq 0$ 时 $b_{n+1}=a_n$ ，则

$$|a_{2n}| \leq 1-|a_0|^2-...-|a_{n-1}|^2 \qquad (n=1,2,3,...)$$

即

$$|a_{2n+2}| \leq 1-|a_0|^2-...-|a_n|^2 \qquad (n=0,1,2,...)$$

至此引理得证。

下面给出定理 3.1 的证明。

**证** 由定理 1.1 的证明可知 $|\varphi^{(n)}(\zeta)| \leq \sum\limits_{v=1}^{n}|c_v|\frac{|\zeta|^{n-v}}{(1-|\zeta|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}$.

若令

$$A_{2m+1}=1-|c_0|^2-...-|c_m|^2$$

$$A_{2m+2}=1-|c_0|^2-...-|c_m|^2$$

其中 $m=0,1,2,...$

则利用引理 3.2 的结果对 $|c_v|$ 进行放大，可得

$$|\varphi^{(n)}(\zeta)| \leq \sum_{v=1}^{n} A_v\frac{|\zeta|^{n-v}}{(1-|\zeta|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}$$

注意到 $c_m$ 是由式子 $F(z)=\varphi(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z})=\sum\limits_{v=0}^{\infty} c_v z^v$ 决定的，则

$$c_m=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial z^m}\varphi\left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right)\Big|_{z=0}$$

由文 [4] 知

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m}\varphi(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}) = \varphi^{(m)}(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z})(\frac{1-|\zeta|^2}{(1+\bar{\zeta}z)^2})^m + \sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j\frac{m!(m-1)!}{j!(m-j)!(m-j-1)!}\frac{\bar{\zeta}^j(1-|\zeta|^2)^{m-j}}{(1+\bar{\zeta}z)^{2m-j}}\varphi^{(m-j)}(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z})$$

则

$$c_m = \frac{1}{m!}[\varphi^{(m)}(\zeta)(1-|\zeta|^2)^m + \sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j\frac{m!(m-1)!}{j!(m-j)!(m-j-1)!}\bar{\zeta}^j(1-|\zeta|^2)^{m-j}\varphi^{(m-j)}(\zeta)]$$

将 $\zeta$ 换成 $z$ 即得定理结果。

定理 3.1 的结果比定理 1.1 的结果更精确。比如考察 Mobius 变换 $f(z)=\frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ 在 $z=0$ 处的导数，当求导次数是奇数次时，由定理 3.1 的估计式可知

$$|f^{(2n+1)}(0)| \le A_{2n+1}(2n+1)! = (2n+1)!(1-|c_0|^2-...-|c_n|^2)$$

经计算 $|c_0|=|a|^2$ ，当 $n\ge 1$ 时 $|c_n|=\frac{1}{n!}|f^{(n)}(0)|=|a|^{n-1}(1-|a|^2)$ ，则

$$\begin{aligned}|f^{(2n+1)}(0)| &\le (2n+1)![1-|a|^2-(1-|a|^2)^2-|a|^2(1-|a|^2)^2...-|a|^{2n-2}(1-|a|^2)^2]\\ &= (2n+1)!(1-|a|^2)[1-(1-|a|^2)(1+|a|^2+...+|a|^{2n-2})]\\ &= (2n+1)!|a|^{2n}(1-|a|^2)\end{aligned}$$

而另一方面，经计算得

$$|f^{(2n+1)}(0)| = (2n+1)!|a|^{2n}(1-|a|^2)$$

所以 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的奇数阶导数的估计值与真实值完全相等。

考虑定理 3.1 结果中的 $A_v$ ，若当 $v\ge 3$ 时统一放大 $A_v$ 至 $A_v\le 1-|c_0|^2-|c_1|^2$ ，那么可得以下推论。

**推论 3.1** 设 $\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|\varphi(z)|<1$ ，则当 $n\ge 3$ 时有

$$|\varphi^{(n)}(z)| \le \frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}(1+|z|)^{n-1} - \sum_{v=3}^{n}\frac{(\varphi'(z))^2|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^{n-2}}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}$$

**证** 由定理 3.1 的结果知

$$|\varphi^{(n)}(z)| \le \sum_{v=1}^{n}A_v\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}$$

其中 $A_1=A_2=1-|c_0|^2$ , 当 $v\ge 3$ 时 $A_v\le 1-|c_0|^2-|c_1|^2$ ，$c_0=\varphi(z)$ ，$c_1=\varphi'(z)(1-|z|^2)$. 那么

$$
\begin{aligned}
|\varphi^{(n)}(z)| &\le \sum_{v=1}^{2} A_v \frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!} + \sum_{v=3}^{n} A_v \frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!} \\
&\le (1-|c_0|^2)\sum_{v=1}^{2} \frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!} + (1-|c_0|^2-|c_1|^2)\sum_{v=3}^{n} \frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!} \\
&= (1-|c_0|^2)\sum_{v=1}^{n} \frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!} + (-|c_1|^2)\sum_{v=3}^{n} \frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!} \\
&= \frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}(1+|z|)^{n-1} - \sum_{v=3}^{n} \frac{(\varphi'(z))^2|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^{n-2}}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}
\end{aligned}
$$

## 4 正实部函数的导数估计

对于正实部函数 $f(z)$ ，若 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ，那么利用其熟知的系数不等式 $|c_n|\le 2\Re f(0)$ 以及前面定理 1.1 完全同样的方法，我们得到

**定理 4.1** 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $\Re f(z)>0$ ，则

$$
|f^{(n)}(z)| \le \frac{2n!\Re f(z)}{(1-|z|^2)^n}(1+|z|)^{n-1}
$$

.

与有界函数不同的是上述定理所得估计式已经相当精确，下面我们举个例子说明。

设 $f(z)=\frac{1+z}{1-z}$ ，显然 $f(z)$ 是解析函数且 $\Re f(z)>0$ 。通过计算可得 $f^{(n)}(z)=\frac{2n!}{(1-z)^{n+1}}$ ，则

$$
|f^{(n)}(z)| = \frac{2n!}{|1-z|^{n+1}}
$$

那么当 $z=x$ ，其中 $x$ 是实数且 $0\le x\le 1$ 时， $|f^{(n)}(x)|=\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$ ，而另一方面，由定理 3.1 的估计式可知

$$
|f^{(n)}(x)| \le \frac{2n!\Re f(x)}{(1-|x|)^n}\frac{1}{1+|x|} = \frac{2n!\frac{1+x}{1-x}}{(1-|x|)^n}\frac{1}{1+|x|} = \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}
$$

显然估计值与真实值完全相等。

接下来考察这一类函数，设 $f(z)$ 是在 $|z|<1$ 内解析的正实部函数。

从下面的定理 4.2 我们就会发现：若设 $r=|z|$ ，那么在定理 4.1 的估计式两边乘 $(1-r)^{n+1}$ ，再取 $r\to 1$ 时的极限就得到等式，即在 $|z|=1$ 上定理 4.1 的估计是处处精确的。

**定理 4.2** 设 $f(z)$ 是在 $|z|<1$ 内解析的正实部函数，设 $r=|z|$ ，则

$$
\lim_{r\to 1}(1-r)^{n+1}|f^{(n)}(z)| = \lim_{r\to 1} 2n!\frac{1-r}{1+r}\Re f(z)
$$

**证** 先证 $f(0)=1$ 的情形。

$f(z)$ 是在 $|z|<1$ 内解析的正实部函数，且 $f(0)=1$ ，则在 $|z|=1$ 上存在唯一的非

负概率测度，使得

$$f(z)=\int\limits_{|\eta|=1}\frac{1+\eta z}{1-\eta z}d\mu(\eta),\qquad \int\limits_{|\eta|=1}d\mu(\eta)=1$$

直接计算得

$$f^{(n)}(z)=2n!\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\eta^n}{(1-\eta z)^{n+1}}d\mu(\eta)$$

设 $z=re^{i\theta_0}$ ，则

$$(1-r)^{n+1}f^{(n)}(re^{i\theta_0})=2n!\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\eta^n(1-r)^{n+1}}{(1-\eta z)^{n+1}}d\mu(\eta)$$

考虑 $F_\eta(z)=\frac{(1-r)^{n+1}}{(1-\eta z)^{n+1}}$ ，因为 $|z|<1$ ， $|1-\eta z|\geq 1-|\eta z|=1-|z|$ ，则 $|F_\eta(z)|\leq 1$.

又

$$\lim_{r\to 1}F_\eta(z)=\begin{cases}1 & \eta=e^{-i\theta_0}\\ 0 & \eta\neq e^{-i\theta_0}\end{cases}$$

记

$$F_0(e^{i\theta_0})=\begin{cases}1 & \eta=e^{-i\theta_0}\\ 0 & \eta\neq e^{-i\theta_0}\end{cases}$$

则根据控制收敛定理

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^{n+1}f^{(n)}(re^{i\theta_0})=2n!\int\limits_{|\eta|=1}\lim_{r\to 1}\eta^nF_\eta(z)d\mu(\eta)=2n!\int\limits_{|\eta|=1}F_0(e^{i\theta_0})\eta^nd\mu(\eta)=2n!e^{-in\theta_0}\mu(\{e^{-i\theta_0}\})$$

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^{n+1}|f^{(n)}(re^{i\theta_0})|=|\lim_{r\to 1}(1-r)^{n+1}f^{(n)}(re^{i\theta_0})|=|2n!e^{-in\theta_0}\mu(\{e^{-i\theta_0}\})|=2n!\mu(\{e^{-i\theta_0}\})$$

另一方面，由我们已得的关于正实部函数的导数估计式 $|f^{(n)}(z)|\leq\frac{2n!\Re f(z)}{(1-|z|)^n}\frac{1}{1+|z|}$ ，两边乘 $(1-r)^{n+1}$, 则

$$(1-r)^{n+1}|f^{(n)}(re^{i\theta_0})|\leq 2n!\frac{1-r}{1+r}\Re f(z)$$

考虑 $\frac{1-r}{1+r}\Re f(z)$.

$$\Re f(z)=\int\limits_{|\eta|=1}\frac{1-|z|^2}{|1-\eta z|^2}d\mu(\eta)$$

同样根据控制收敛定理得到

$$\lim_{r\to 1}\frac{1-r}{1+r}\Re f(z)=\int\limits_{|\eta|=1}\lim_{r\to 1}\frac{(1-r)^2}{|1-\eta z|^2}d\mu(\eta)=\mu(\{e^{-i\theta_0}\})$$

那么

$$\lim_{r\to 1}2n!\frac{1-r}{1+r}\Re f(z)=2n!\mu(\{e^{-i\theta_0}\})$$

所以

$$\lim_{r\to1}(1-r)^{n+1}|f^{(n)}(z)|=\lim_{r\to1}2n!\frac{1-r}{1+r}\Re f(z).$$

下证 $f(0)\neq1$ 的情形。

若 $f(0)\neq1$ ，则考虑

$$\tilde{f}(z)=\frac{f(z)-i\Im f(0)}{\Re f(0)}.$$

直接计算得， $\Re\tilde{f}(z)=\frac{\Re f(z)}{\Re f(0)}>0$ ， $\tilde{f}(0)=1$. 那么 $\tilde{f}(z)$ 是正实部函数，且 $\tilde{f}(0)=1$ ，则根据上一部分的结果得

$$\lim_{r\to1}(1-r)^{n+1}|\tilde{f}^{(n)}(z)|=\lim_{r\to1}2n!\frac{1-r}{1+r}\Re\tilde{f}(z) \tag{4.2}$$

又 $\tilde{f}^{(n)}(z)=\frac{f^{(n)}(z)}{\Re f(0)}$ ，则 (4.2) 可化为

$$\lim_{r\to1}(1-r)^{n+1}|\frac{f^{(n)}(z)}{\Re f(0)}|=\lim_{r\to1}2n!\frac{1-r}{1+r}\frac{\Re f(z)}{\Re f(0)}$$

即

$$\lim_{r\to1}(1-r)^{n+1}|f^{(n)}(z)|=\lim_{r\to1}2n!\frac{1-r}{1+r}\Re f(z).$$

定理证毕。

**推论 4.1** 设 $f(z)$ 是在 $|z|<1$ 内解析的正实部函数，且 $f(0)=1$ ，设 $z=re^{i\theta_0}$ ， $r=|z|$ ，则

$$\lim_{r\to1}(1-r)^{n+1}|f^{(n)}(z)|=\lim_{r\to1}2n!\frac{1-r}{1+r}\Re f(z)=2n!\mu(\{e^{-i\theta_0}\}).$$

**证** 显然由定理 4.2 的证明就可得到此推论成立。

根据测度论的知识可知， $\mu(\{e^{-i\theta_0}\})$ 在圆上大部分点处都等于 0 ，只有可数个点处可能不等于 0. 那么由推论 4.1 可知，除掉单位圆上可数个点外， $\lim_{r\to1}(1-r)^{n+1}|f^{(n)}(z)|$ 与 $\lim_{r\to1}2n!\frac{1-r}{1+r}\Re f(z)$ 的极限都等于 0.

**推论 4.2** 设 $f(z)$ 是在 $|z|<1$ 内解析的正实部函数，设 $z=re^{i\theta}$ ， $r=|z|$ ，那么对下面两个实函数

$$\varphi(re^{i\theta})=\frac{1-r}{1+r}\Re f(re^{i\theta})$$

$$\psi(re^{i\theta})=(1-r)^{n+1}|f^{(n)}(re^{i\theta})|$$

有不等式 $\psi(re^{i\theta})\le\varphi(re^{i\theta})$ 成立。

**证** 在定理 4.1 所得结果的不等式两边同乘 $(1-r)^{n+1}$ 即得此推论成立。

下面说明对任意 $\theta$ ， $\varphi(re^{i\theta})$ 当是关于 $r$ 单调递减的。

因为

$$[\log(\frac{1-r}{1+r}\Re f(re^{i\theta}))]'=-\frac{2}{1-r^2}+\frac{\Re[f'(re^{i\theta})e^{i\theta}]}{\Re f(re^{i\theta})}$$

又

$$|\Re[f'(re^{i\theta})e^{i\theta}]|\le|f'(re^{i\theta})|\le\frac{2}{1-r^2}\Re f(re^{i\theta})$$

则

$$[\log(\frac{1-r}{1+r}\Re f(re^{i\theta}))]' \leq -\frac{2}{1-r^2}+\frac{2}{1-r^2}=0$$

所以 $\frac{1-r}{1+r}\Re f(re^{i\theta})$ 关于 $r$ 单调递减。

正因为 $\varphi(re^{i\theta})$ 当是关于 $r$ 单调递减的，那么 $\varphi(re^{i\theta})$ 的图像就类似于一个抛物面。又由推论 4.1 和推论 4.2 可知 $\psi(re^{i\theta})$ 的图像是被包含在抛物面里面的一个曲面，且在 $r\to 1$ 时 $\varphi(re^{i\theta})$ 和 $\psi(re^{i\theta})$ 在大部分点都等于 0.

## 5 引理 3.2 的应用

我们已知有如下的 Bohr 定理：

**定理 5.1** （见 [5]）设 $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|\varphi(z)|<1$ 则当 $|z|<\frac{1}{3}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n<1$.

利用引理 3.2 我们将得到比 Bohr 定理更精确的估计，即

**定理 5.2** 设 $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|\varphi(z)|<1$ 则当 $|z|\leq\frac{1}{3}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n<1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{|z|^{2n+1}}{1-|z|}$.

**证** 设 $r=|z|$，由引理 3.2

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n &= |a_0|+|a_1|r+|a_2|r^2+|a_3|r^3+|a_4|r^4+...+|a_n|r^n+...\\
&\leq |a_0|+(1-|a_0|^2)r+(1-|a_0|^2)r^2+(1-|a_0|^2-|a_1|^2)r^3+(1-|a_0|^2-|a_1|^2)r^4\\
&+...+(1-|a_0|^2-...-|a_n|^2)r^{2n+1}+(1-|a_0|^2-...-|a_n|^2)r^{2n+2}+...\\
&= |a_0|+(1-|a_0|^2)\sum_{n=1}^{\infty}r^n-\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2\sum_{m=2n+1}^{\infty}r^m)\\
&= |a_0|+(1-|a_0|^2)\frac{r}{1-r}-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n+1}}{1-r}\end{aligned}$$

因为 $|a_0|+(1-|a_0|^2)\frac{r}{1-r}$ 关于 $r$ 单调递减，那么当 $r\leq\frac{1}{3}$ 时

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n &\leq |a_0|+(1-|a_0|^2)\frac{r}{1-r}-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n+1}}{1-r}\\
&\leq |a_0|+(1-|a_0|^2)\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n+1}}{1-r}\\
&= \frac{2|a_0|+1-|a_0|^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n+1}}{1-r}\end{aligned}$$

又当 $0\leq|a_0|<1$ 时，$\frac{2|a_0|+1-|a_0|^2}{2}<1$，所以当 $r\leq\frac{1}{3}$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n<1-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n+1}}{1-r}.$$

定理证毕。

## 参　考　文　献

[1] 潘一飞, 廖孝中. 关于有界函数的导数 [J]. 江西师范大学学报 (自然科学版)，1984，(1)： 21-24.

[2] 苑文法. 有界正则函数的导数估计 [J]. 数学杂志， 2001， 21(3)： 301-303.

[3] 谭德邻. 有界异零函数的系数估计 [J]. 数学年刊， 1983， 4(1)： 97-104.

[4] 龚升. 关于 Mobius 变换的一点注记 [J]. 纯粹数学与应用数学， 1985， 1(1)： 1-15.

[5] H. Boas, and D. Khavinson, Bohr's power series theorem in several variables, Proc. Amer. Math. Soc. 125,(1997), no. 10, 2975-2979

# Estimation of Derivatives for Bounded Analytic Functions and Positive Real Part Analytic Functions

DAI Shaoyu* PAN Yifei**

*Jinling Institute of Technology , Nanjing 210012, China. E-mail: dymdsy@163.com

**Jiangxi Normal University and Indiana University-Purdue University Fort Wayne, USA.

**Abstract** In this paper, we mainly discuss the problem of estimating the n-th derivatives of bounded analytic functions and positive real part analytic functions.

**Keywords** bounded analytic function, positive real part analytic function, eatimation of derivative

**2000 MR Subject Classification** 30C10